



**Zadania na XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Leja  
Poziom I**

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Finał

26 kwietnia 2014 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Dane są dwa okręgi:  $o_1$  – o środku  $O$  i średnicy  $|AB| = 2R$  oraz  $o_2$  – o środku  $B$  i promieniu  $BO$ , które przecinają się w punktach  $C$  i  $C'$ . Niech  $l$  będzie prostą styczną do okręgu  $o_1$  w punkcie  $B$ , natomiast prosta prostopadła do cięciwy  $BC$  przechodząca przez  $O$  przecina prostą  $l$  w punkcie  $D$ . Ponadto na prostej  $l$  obrano punkt  $E$  taki, że  $B$  leży między punktami  $D$  i  $E$  oraz  $|DE| = 3R$ . Obliczyć długość  $AE$ .
2. Niech  $E$  i  $F$  będą punktami boków  $CD$  i  $BC$  równoległoboku  $ABCD$ . Prosta  $AE$  przecina przekątną  $BD$  w punkcie  $P$ , takim, że  $|DP|:|BD| = 1:6$ , a prosta  $AF$  przecina przekątną  $BD$  w punkcie  $R$ , takim, że  $|BR|:|BD| = 1:4$ . Wyznaczyć  $\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|CE|}{|ED|}$ .
3. Oblicz sumę kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania:  
$$3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + 5 \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 8.$$
4. Wspaniały matematyk i patron naszego konkursu Franciszek Leja urodził się w XIX wieku a zmarł w XX wieku. Oblicz rok jego urodzin i rok śmierci, jeśli suma dwucyfrowych końcówek roku urodzin i roku śmierci przy dzieleniu przez 12 daje iloraz 13 i resztę 8. Ponadto różnica dwucyfrowej końcówki roku urodzin i najmniejszej liczby naturalnej dodatniej, podzielnej jednocześnie przez 2 i 3, jest równa dwucyfrowej końcówce roku śmierci.
5. Znajdź (bez użycia kalkulatora) największą i najmniejszą pięciocyfrową liczbę naturalną  $n$  podzielną przez 101, dla której pierwsza cyfra jest taka jak piąta, a druga taka jak czwarta.

Powodzenia!